Problemas y Ejercicios Resueltos.
Tema 3: Aplicaciones Lineales.

Ejercicios

1.- *Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:*

(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $f((x, y, z)) = (x - y, y + 2z)$.

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $f((x, y, z)) = (x - y^2, y + 2z)$.

Solución. (i) Es lineal ya que, para todo $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se cumple

$$\begin{aligned} f((\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2)) &= f((\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)) = \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_2 - \alpha y_1 - \beta y_2, \alpha y_1 + \beta y_2 + 2\alpha z_1 + 2\beta z_2) = \\ &= (\alpha x_1 - \alpha y_1, \alpha y_1 + 2\alpha z_1) + (\beta x_2 - \beta y_2, \beta y_2 + 2\beta z_2) = \\ &= \alpha(x_1 - y_1, y_1 + 2z_1) + \beta(x_2 - y_2, y_2 + 2z_2) = \\ &= \alpha f((x_1, y_1, z_1)) + \beta f((x_2, y_2, z_2)) \end{aligned}$$

(ii) No es lineal ya que

$$f((0, 1, 0) + (0, 2, 0)) = f((0, 3, 0)) = (-9, 3) \neq (-1, 1) + (-4, 2) = f((0, 1, 0)) + f((0, 2, 0)).$$

2.- *Se considera* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *aplicación lineal tal que* $f((1, -1)) = (-1, -2, -3)$ *y* $f((-3, 2)) = (0, 5, 3)$. *Determinar, si es posible,* $f((x, y))$ *donde* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Solución. Los vectores $\{(1, -1), (-3, 2)\}$ forman un conjunto libre de $\mathbb{R}^2$ ya que

$$(0, 0) = \alpha(1, -1) + \beta(-3, 2) = (\alpha - 3\beta, -\alpha + 2\beta) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = \alpha - 3\beta \\ 0 = -\alpha + 2\beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Además el cardinal de $\{(1, -1), (-3, 2)\}$ es 2, que coincide con la dimensión de $\mathbb{R}^2$, luego $\{(1, -1), (-3, 2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y podemos expresar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ como combinación lineal de $\{(1, -1), (-3, 2)\}$. En efecto,

$$(x, y) = (-2x - 3y)(1, -1) + (-x - y)(-3, 2),$$

Entonces, como f es lineal, se cumple

$$f((x,y)) = (-2x-3y)f((1,-1) + (-x-y)f((-3,2)).$$

3.- *Hallar una aplicación lineal* $f : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ *tal que* $kerf = \{a_1x + a_1x^2 | a_1 \in \mathbb{R}\}$.

Solución. Una base de $\ker f$ es $\mathfrak{B}_{\ker f} = \{x + x^2\}$. Podemos completar esta base hasta obtener una base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Por ejemplo, $\{1, x, x+x^2\}$ es una base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Entonces, si queremos definir una aplicación lineal $f : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ tal que $\ker f = \{a_1x + a_1x^2 | a_1 \in \mathbb{R}\}$ es obvio que $f(x+x^2) = (0,0,0,0)$. Además, debemos definir $f(1)$ y $f(x)$ de forma que formen un conjunto libre. Por ejemplo, la aplicación lineal que verifica $f(x+x^2) = (0,0,0,0)$, $f(1) = (1,0,0,0)$ y $f(x) = (0,1,0,0)$ verifica lo pedido en el enunciado.

4.- *Hallar, si es posible, una aplicacin lineal* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $kerf =< (0,1,-1,1),(0,1,0,1) >$ *e* $Imf =< (1,0,1),(2,1,0) >$.

Solución. Si queremos definir una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, debe cumplirse que $dim(\mathbb{R}^4) = dim(\ker f + dim \mathrm{Im} f$ y los subespacios indicados lo cumplen.

Por otro lado, para definir una aplicación lineal, es suficiente con dar las imágenes de los elementos de una base del espacio vectorial origen. Si queremos que $\ker f =< (0,1,-1,1),(0,1,0,1) >$, podemos tomar una base que tenga a $S = \{(0,1,-1,1),(0,1,0,1)\}$ como dos de sus vectores. Esto es posible porque el conjunto S es libre. Completamos esta base con $\{(1,0,0,0),(0,0,0,1)\}$ y definimos la aplicación f en la base $\{(0,1,-1,1),(0,1,0,1),(1,0,0,0),(0,0,0,1)\}$ mediante

$$f((0,1,-1,1)) = (0,0,0),\ f((0,1,0,1)) = (0,0,0),\ f((1,0,0,0)) = (1,0,1),\ f((0,0,0,1)) = (2,1,0).$$

Observar que al ser $\{(1,0,1),(2,1,0)\}$ un conjunto libre garantizamos que $\ker f$ es el subespacio deseado.

5.- *Calcular el núcleo y la imagen de la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{P}_2(x)$ *cuya matriz asociada (empleando notación por filas) respecto de la base canónica de* $\mathbb{R}^4$ *y* $\{1, x, x^2\}$ *es* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Solución. Si empleamos la expresi'on matricial de f, sabemos que

$$\begin{aligned} f((a,b,c,d)) &= (a\ b\ c\ d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \\ &= (a+2b-c+2d) + (-4b-2d)x + (-a+b-c-2d)x^2. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 | f((a,b,c,d)) = 0\} \\ &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 | (a+2b-c+2d) + (-4b-2d)x + (-a+b-c-2d)x^2 = 0\} \\ &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 | a+2b-c+2d = -4b-2d = -a+b-c-2d = 0\} \\ &= \{(\frac{7}{2}b, b, \frac{3}{2}b, -2b) | b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

6.- *Sean V y W dos espacios vectoriales, ambos con dimensión finita n y $f : V \to W$ lineal. Demostrar que si f es inyectiva, entonces f es biyectiva.*

Solución. Como f es inyectiva, se tiene que $\ker f = \{0_V\}$. Entonces, de $\dim(V) = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f)$ deducimos que $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im} f)$ y como $\dim(V) = \dim(W)$, deducimos que $\mathrm{Im} f = W$, luego f es sobreyectiva.

7.- *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n, tal que n es un número impar y $f : V \to V$ lineal. Demostrar que: $\ker f \neq \mathrm{Im} f$.*

Solución. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\ker f = \mathrm{Im} f$. Entonces, $\dim(V) = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f) = 2\dim(\ker f)$, o sea un número par, lo que contradice la hipótesis del enunciado. Consecuentemente, $\ker f \neq \mathrm{Im} f$.

8.- *Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ cuya matriz asociada, empleando notación por filas, respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ sea $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \\ 3 & -6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Localizar bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^3}$ y $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^4}$, para que la matriz asociada a f sea de la forma $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Solución. Si denotamos por e_i, $i = 1 \cdots, 4$ los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^4$, la expresión matricial de f viene dada por

$$
\begin{aligned}
f((x, y, z)) &= (x\ y\ z) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \\ 3 & -6 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \\
&= (-x + 2y + 3z\ \ 2x - 4y - 6z\ \ -y - 2z\ \ x + y + 3z) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \\
&= (-x + 2y + 3z, 2x - 4y - 6z, -y - 2z, x + y + 3z)
\end{aligned}
$$

Si queremos que la matriz asociada a f sea $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, observamos que los últimos vectores de la base de $\mathbb{R}^3$ que buscamos deben pertenecer a $\ker f$, así que calculamos en primer lugar el núcleo de la aplicación lineal:

$$
\begin{aligned}
\ker f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f((x, y, z)) = (0, 0, 0, 0)\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (-x + 2y + 3z, 2x - 4y - 6z, -y - 2z, x + y + 3z) = (0, 0, 0, 0)\} \\
&= \{(x, 2x, -x) | x \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}
$$

Por tanto, una base de $\ker f$ es $\mathfrak{B}_{\ker f} = \{(1, 2, -1)\}$. Completamos $\mathfrak{B}_{\ker f}$ hasta obtener una base de $\mathbb{R}^3$: $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 2, -1)\}$.

Por otro lado, deseamos que las imágenes de los primeros vectores tengan por coordenadas en la base $\mathbb{R}^4$ que buscamos sean $(1\ 0\ 0\ 0)$ y $(0\ 1\ 0\ 0)$. Esto significa que los dos primeros vectores de la base de $\mathbb{R}^4$ sean $f((1, 0, 0)) = (-1, 2, 0, 1)$ y $f((0, 1, 0)) = (2, -4, -1, 1)$. Necesitamos dos vectores más linealmente independientes para completar la base buscada. Podemos tomar el sistema generador formado por los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y los dos vectores hallados colocados en las dos primeras posiciones. Estos seis vectores forman un sistema generador ligado y al ser el primero de ellos no nulo, significa que hay uno de ellos que es $\mathbb{R}$-combinación lineal del resto. En efecto, $(0,0,0,1)$ es combinación lineal de los otros cinco. Entonces, $\{(-1,2,0,1),(2,-4,-1,1),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ es otro sistema generador de $\mathbb{R}^4$. De nuevo, este sistema generador es ligado, por tener 5 vectores en lugar de 4, que es la dimensión de $\mathbb{R}^4$. Como se ha mencionado, existe uno que es combinación lineal de los que le preceden. Así, $(0,0,1,0)$ es combinación lineal de los demás. Entonces, $\{(-1,2,0,1),(2,-4,-1,1),(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$ es la base de $\mathbb{R}^4$ buscada.

9.- *Estudiar si las matrices A y B son equivalentes, siendo* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución. Si A y B son equivalentes, las podemos ver como matrices asociadas a la misma aplicación lineal. Empleando la notación por filas, si interpretamos A como la matriz asociada a una aplicación lineal $f : V \to W$ entre un espacio vectorial V de dimensión 3 y otro W de dimensión 4 con respecto a las bases $\mathfrak{B}_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\mathfrak{B}_W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, observamos que

$$\begin{aligned}
\ker f &= \{\sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i \in V | f(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i) = 0_W\} \\
&= \{\sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i \in V | (\alpha_1 + \alpha_2) w_1 + (\alpha_1 + \alpha_3) w_2 + (\alpha_2 + \alpha_3) w_4 = 0_W\} \\
&= \{\sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i \in V | \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3 = 0\} = \{0_V\}.
\end{aligned}$$

Si realizamos lo mismo para B, suponiendo que las bases respecto a las cuáles está calculada sean $\mathfrak{B}_V = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$ y $\mathfrak{B}_W = \{w'_1, w'_2, w'_3, w'_4\}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\ker f &= \{\sum_{i=1}^{3} \beta_i v'_i \in V | f(\sum_{i=1}^{3} \beta_i v'_i) = 0_W\} \\
&= \{\sum_{i=1}^{3} \beta_i v'_i \in V | (\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3) w'_1 + (\beta_2 + \beta_3) w'_2 + (-\beta_1 + \beta_2) w'_3 = 0_W\} \\
&= \{\beta_1 (v_1 + v_2 - v_3) | \beta_1 \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Por tanto, A y B no pueden ser matrices asociadas a la misma aplicación lineal, ya que los núcleos dan de dimensiones diferentes. Esto significa que A y B no son equivalentes.

Problemas

1.- *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n y $f : V \to V$ lineal. Demostrar que $V =$Im$f \oplus$ker$f$ si y sólo si Im$f =$Imf^2.*

Solución. $\Rightarrow$ Supongamos que $V = \text{Im} f \oplus \ker f$. Sea $v \in V$. Entonces, existe $f(v')$ y $v'' \in \ker f$ tal que

$$v = f(v') + v''.$$

Ahora,

$$f(v) = f^2(v') + f(v'') = f^2(v') \in \text{Im} f^2.$$

Por tanto, Imf $\subseteq$Imf^2. Además, para cada $v \in V$, es inmediato que $f(f(v)) \in$ Imf, luego Im$f^2 \subseteq$ Imf.

$\Leftarrow$ Sea $v \in V$. Como Imf =Imf^2, sabemos que existe v' tal que $f(v) - f(f(v'))$. Entonces, expresamos $v = f(v') + v - f(v')$. Es claro que $f(v') \in$ Imf. Ademas, $v - f((v') \in$ ker$f$, ya que $f(v - f(v')) = f(v) - f(f(v')) = 0_V$. Por tanto, $V \subseteq$Imf+ker$f$. Pero Imf y ker$f$ son subespacios de V, luego Imf + ker$f \subseteq V$. Consecuentemente, $V =$ Imf + ker$f$.

Sólo falta por ver que Im$f \cap$ ker$f = 0_V$. Ahora, si tomamos la aplicación lineal $f_{|f(V)}$ de Imf =Imf^2, deducimos que $f_{|f(V)}$ es biyectiva y, por tanto, ker$f^2 = \{0_V\}$. Entonces, si $u \in$ Im$f \cap$ ker$f$, tenemos que $f(u) = 0_V$, por estar $u \in$ ker$f$, y existe $v \in V$ tal que $f(v) = u$. Luego, $0_V = f(u) = f(f(v))$, así que $v \in$ ker$f^2 = \{0_V\}$, y, consecuentemente, $u = f(v) = f(0_V) = 0_V$.

2.- *Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f((-1, 1, 3)) = (6, -4, 16)$, $f((-2, 1, 1)) = (-2, -5, 1)$ y $f((3, 2, -1)) = (1, 14, -12)$.*

(i) Calcular la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Sin probar la inyectividad y/o suprayectividad de f directamente, ¿podemos deducir si f es un automorfismo?

Solución. (i) Si tomamos la matriz asociada a f respecto de $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^3} = \{(-1, 1, 3), (-2, 1, 1), (3, 2, -1)\}$ base en el espacio vectorial origen y la base canónica en el espacio vectorial de llegada, obtenemos

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 16 \\ -2 & -5 & 1 \\ 1 & 14 & -12 \end{pmatrix}.$$

Si tenemos en cuenta la relación existente entre matrices asociadas a una aplicación lineal, se tiene que la matriz asociada a f respecto de la base canónica es:

$$B = M_{\mathfrak{B}_c \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^3}} A = \begin{pmatrix} \frac{3}{17} & -\frac{7}{17} & \frac{2}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{8}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{7}{17} & -\frac{5}{17} & -\frac{1}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -4 & 16 \\ -2 & -5 & 1 \\ 1 & 14 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

(ii) Sí, podemos calcular el núcleo de f. Si éste es $\{(0, 0, 0)\}$, entonces f es inyectiva y por ser $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, deducimos que es biyectiva. Ahora,

$$\ker f = \{(x, -\frac{11}{5}x, -\frac{7}{5}x) | x \in \mathbb{R}\},$$

luego f no es inyectiva y, por tanto, tampoco es biyectiva.

3.- *Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f((x, y, z)) = (x - y, y + 2z)$.*

(i) Demostrar que f es lineal.

(i) Calcular Ker$f$ *e* Imf.

(ii) Calcular bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ de forma que la matriz asociada respecto de ellas sea $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución. (i) Empleando la definición de núcleo de una aplicación, es claro que

$$\ker f = \{(-2z, -2z, z) | z \in \mathbb{R}\}$$

Además, de
$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f)$$
deducimos que $\dim(\mathrm{Im} f) = 2$, así que $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$.

(ii) El que las últimas filas de la matriz tengan todas sus entradas 0, nos indica que los últimos vectores de la base de $\mathbb{R}^3$ deben ser vectores linealmente independientes de $\ker f$. Pero, como $\ker f$ es un subespacio vectorial de dimensión 1, sólo podemos tomar un vector no nulo del $\ker f$ para formar parte de la base buscada. Elegimos, por ejemplo, $\{(-2,-2,1)\}$. Completamos éste, hasta obtener una base de $\mathbb{R}^3$, $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,0),(0,1,0),(-2,-2,1)\}$. Tomamos ahora como base de $\mathbb{R}^2$ a $f((1,0,0))$ y $f((0,1,0))$, esto es, $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2} = \{(1,0),(-1,1)\}$. La matriz asocida a f respecto de $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^3}$ y $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.- *Sea* $V = W_1 \oplus W_2$. *Demostrar que existe un único endomorfismo tal que* $f^2 = f$, *ker*$f = W_1$ *y* *Im*$f = W_2$.

Solución. Para definir un endomorfismo de un espacio vectorial, es suficiente con dar la imagen de una base de $\mathfrak{B}_V$. Consideramos una base de V que sea unión de bases de W_1 y W_2, esto es, $\mathfrak{B}_V = \mathfrak{B}_{W_1} \cup \mathfrak{B}_{W_2}$. Definimos la aplicación lineal $f : V \to V$ definida por $f(w_{1i}) = 0_V$, siendo $w_{1i} \in \mathfrak{B}_{W_1}$ y $f(w_{2j}) = w_{2j}$, para todo $w_{2j} \in \mathfrak{B}_{W_2}$. Es evidente que la aplicación f definida cumple lo solicitado.

Veamos ahora la unicidad. Supongamos que $g : V \to V$ es otra aplicación lineal que satisface $g^2 = g$, $\ker g = W_1$ y $\mathrm{Im} g = W_2$. Entonces, $g(w_{1i}) = 0_V = f(w_{1i})$, para cada $w_{1i} \in \mathfrak{B}_{W_1}$. Nos falta probar que $g(w_{2j}) = w_{2j}$, para todo $w_{2j} \in \mathfrak{B}_{W_2}$. En efecto, por ser $g^2 = g$, se tiene $g(g(w_{2j})) = g(w_{2j})$. Pero al ser g lineal, la igualdad anterior implica $g(g(w_{2j}) - w_{2j}) = 0_V$, así que $g(w_{2j}) - w_{2j} \in \ker g = W_1$. Ahora, $g(w_{2j}) - w_{2j} \in W_2$ por ser diferencia de dos elementos de W_2. Consecuentemente, $g(w_{2j}) - w_{2j} \in W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$, ya que por hipótesis $V = W_1 \oplus W_2$. En definitiva, $g(w_{2j}) = w_{2j}$, para todo $w_{2j} \in \mathfrak{B}_{W_2}$.