
Problemas y Ejercicios Propuestos.

Tema 2: Espacios vectoriales.

Ejercicios

- 1.- Sean F, G y H tres subespacios vectoriales de un espacio vectorial V . Probar que $(F \cap G) + (F \cap H) \subseteq F \cap (G + H)$. ¿Es cierto el recíproco?
- 2.- Calcular bases de $S, T, S + T$ y $S \cap T$ siendo $S = \langle (1, 1, 1), (1, 0, 2), (1, 2, 0) \rangle$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.
- 3.- Sea $C = \{(1, 5, 1), (2, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$. Probar que C es un sistema generador de \mathbb{R}^3 y localizar un subconjunto de C que sea base de \mathbb{R}^3 .
- 4.- Dada la base $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ hallar la base $\mathfrak{B}'_{\mathbb{R}^3} = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$ tal que la ecuación del cambio de coordenadas venga dada por $(x_1 \ x_2 \ x_3) = (y_1 - 2y_3 \ -y_2 + 5y_3 \ y_1 - 3y_3)$, siendo $(x_1 \ x_2 \ x_3)$ e $(y_1 \ y_2 \ y_3)$ las coordenadas de un vector arbitrario en la base $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^3}$ y $\mathfrak{B}'_{\mathbb{R}^3}$, respectivamente.
- 5.- Sea V un K -espacio vectorial de dimensión 3 y $\{u_1, u_2, u_3\}$ una base de V . Demostrar que $\{u_1, u_1 - u_2, u_1 + u_2 - u_3\}$ es otra base de V .
- 6.- Sea $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2, x_3 = 0\}$ subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 . Hallar una base de U y localizar las coordenadas respecto a ella de $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U$.

Problemas

- 1.- Sea $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0\}$ y $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, x + z = 0\}$. Demostrar que G y H son subespacios vectoriales de \mathbb{R}^3 (tomando en \mathbb{R}^3 la suma y la multiplicación por un escalar estándar) y que $\mathbb{R}^3 = G \oplus H$.
- 2.- En \mathbb{R}^5 se definen los subespacios vectoriales $F = \langle (1, 0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1, 0), (2, 1, 1, 1, 1) \rangle$ y $G = \{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = x_2 = x_4, x_3 + x_5 = 0\}$.
 - (a) Hallar una base de F , de G , $F + G$ y $F \cap G$. ¿Cuáles son sus dimensiones?
 - (b) Calcular las coordenadas del vector $(0, -1, 1, -1, 1) \in F$ en la base hallada en el apartado anterior.

3.- Sea $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 2x_2 = x_4, x_3 = 0\}$.

- (a) Hallar W subespacio suplementario de U .
- (b) Descomponer el vector (x, y, z, t) en la forma $u + w \in U + W$.