Problemas y Ejercicios Propuestos.

Tema 1: Fundamentos.

Ejercicios

1.- Sean A, B y C tres conjuntos. Demostrar que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2.- Sean $A = \{a, b, c\}$, $A_1 = \{b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, y $f : A \to B$ y $g : B \to A$ dos aplicaciones definidas por $f(a) = f(b) = 1$, $f(c) = 4$, $g(1) = g(4) = c$, $g(2) = b$, $g(3) = a$.

(i) Calcular $g \circ f$.

(ii) Calcular Imf, $Im(g \circ f)$, $g^{-1}(A_1)$, $g \circ f^{-1}(A_1)$ y $f^{-1}(g^-1(A_1))$.

3.- Estudiar si las siguientes aplicaciones son inyectivas y/o sobreyectivas:

i)
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & n^4 \end{array}$$

ii)
$$\begin{array}{rccc} f: & (0,1) & \to & (0,+\infty) \\ & x & \mapsto & \dfrac{x}{1-x} \end{array}$$

4.- Si $(R, +, \cdot)$ es anillo con identidad tal que $\{0\} \underset{\neq}{\subset} R$, entonces $1 \neq 0$ y 0 no es inversible para $\cdot$.

5.- Encontrar todas las raíces racionales de los siguientes polinomios: $x^n - 1$, $x^n + 1$, $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$, $2x^7 + 9x^6 + 11x^5 - 2x^4 - 13x^3 - 11x^2 + 4$.

Problemas

1.- Sea U el conjunto universal y A un conjunto. Se llama **complementario** de A, y se denota por A^c, a

$$A^c = U - A = \{x \in U | x \notin A\}.$$

Demostrar que

(i) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

(ii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Nota: A (i) y (ii) se les llama **Leyes de Morgan**

2.- Si A, B y C son tres conjuntos, demostrar que se tiene la siguiente relación entre los cardinales de los conjuntos implicados: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

3.- Decidir si los siguientes enunciados son correctos o no. Si es correcto, demostrarlo y si no lo es, dar un contraejemplo.

(i) $A \cup B = A \cup C \Longrightarrow B = C$.

(ii) $A \times B = B \times A$.

(iii) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

4.- Sean $(A, *)$ un sistema algebraico y $a \in A$. Se dice que a es **simplificable** si se verifican las dos condiciones siguientes:

a) $a * b = a * c \quad \Rightarrow \quad b = c$.

b) $b * a = c * a \quad \Rightarrow \quad b = c$.

Demostrar que si $*$ es asociativa y $a \in A$ es un elemento inversible, entonces a es simplificable.

5.- Supongamos que $f \in \mathbb{R}[x]$ y $a \in \mathbb{C}$. Demostrar que $f(\overline{a}) = \overline{f(a)}$. Deducir que si a es una raíz de f, entonces $\overline{a}$ también es raíz de f. Deducir que todo polinomio de $\mathbb{R}[x]$ de grado impar tiene al menos una raíz real y que no existen polinomios irreducibles sobre $\mathbb{R}$ de grado mayor que 2.