Problemas y Ejercicios Resueltos.
Tema 1: Fundamentos.

Ejercicios

1.- *Demostrar que* $B \subseteq A$ *si y sólo si* $\mathfrak{P}(B) \subseteq \mathfrak{P}(A)$.

Solución. $\Longrightarrow$) Si $B \subseteq A$, entonces B es un subconjunto de A. Por tanto, para cada $C \in \mathfrak{P}(A)$, se cumple $C \subseteq B$. Luego, $C \subseteq B \subseteq A$. En particular, $C \subseteq A$ y, por consiguiente $C \in \mathfrak{P}(A)$.

$\Longleftarrow$) Es inmediato. Si $\mathfrak{P}(B) \subseteq \mathfrak{P}(A)$, tomando como elemento de $\mathfrak{P}(B)$ a B, se sigue que $B \in \mathfrak{P}(A)$. Pero, los elementos de $\mathfrak{P}(A)$ son los subconjuntos de A, luego $B \subseteq A$.

2.- *Si* $A = \{0, 7\}$ *y* $B = \{1, 7\}$, *hallar* $(A \times B) \cap (B \times A)$.

Solución. Por definición, $A \times B = \{(0, 1), (0, 7), (7, 1), (7, 7)\}$ y $B \times A = \{(1, 0), (1, 7), (7, 0), (7, 7)\}$, luego $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(7, 7)\}$.

3.- *Sean* $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $B_1 = \{1, 3\}$ *y* $f : A \to B$ *y* $g : B \to A$ *dos aplicaciones definidas por* $f(a) = f(b) = 1,\ f(c) = 4,\ g(1) = g(4) = c,\ g(2) = b,\ g(3) = a$.

(i) Calcular $f \circ g$

(ii) Calcular $Im(f \circ g)$, $(f \circ g)(B_1)$, $(f \circ g)^{-1}(B_1)$ *y* $g^{-1}(f^{-1}(B_1))$.

Solución. (i) Por definición $f \circ g : B \to B$ definida por $f \circ g(1) = f(g(1)) = f(c) = 4$, $f \circ g(2) = f(g(2)) = f(b) = 1$, $f \circ g(3) = f(g(3)) = f(a) = 1$, $f \circ g(4) = f(g(4)) = f(c) = 4$.

(ii) $Im(f \circ g) = \{f(g(x))|x \in B\} = \{1, 4\}$. $(f \circ g)(B_1) = \{f(g(1)), f(g(3))\} = \{1, 4\}$. $(f \circ g)^{-1}(B_1) = \{x \in B|f(g(x)) \in B_1\} = \{2, 4\} = g^{-1}(f^{-1}(B_1))$.

4.- *Estudiar si las siguientes aplicaciones son inyectivas y/o sobreyectivas:*

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *donde* $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & si\ x \leq 0. \\ 1 + x^2, & si\ x > 0. \end{cases}$.

ii) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *donde* $f((x, y)) = 2x + 3y$.

Solución. (i) No es ni inyectiva ni sobreyectiva. En efecto, $f(-1) = f(1)$, luego no es inyectiva y $f^{-1}(-2) = \emptyset$, asi que tampoco es sobreyectiva.

(ii) No es inyectiva ya que $f((3,0)) = 6 = f((-3,4))$. Sí es sobreyectiva ya que para cada $a \in \mathbb{R}$ si tomamos $(x, \frac{a-2x}{3}) \in \mathbb{R}^2$, se cumple $f((x, \frac{a-2x}{3})) = a$.

5.- *Demostrar que si* $(R, +, \cdot)$ *es un anillo, entonces,* $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.

Solución. Como 0 es el elemento neutro para la suma, se cumple $0 = 0 + 0$, así que, aplicando la propiedad distributiva se sigue

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$$

Pero si sumamos $-(x \cdot 0)$ a ambos miembros de la igualdad obtenemos

$$0 = -(x \cdot 0) + x \cdot 0 = -(x \cdot 0) + (x \cdot 0 + x \cdot 0)$$

y aplicando la propiedad asociativa y que $-(x \cdot 0)$ es el elemento opuesto de $x \cdot 0$, concluimos

$$0 = -(x \cdot 0) + (x \cdot 0 + x \cdot 0) = (-(x \cdot 0) + x \cdot 0) + x \cdot 0 = 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0.$$

Para demostrar $0 \cdot x = 0$ se razona igual.

Problemas

1.- *Demostrar que los conjuntos* $A - B$, $B - A$ *y* $A \cap B$ *definen una partición de* $A \cup B$, *y como consecuencia se tiene*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Solución. Comprobamos en primer lugar que los conjuntos $A - B$, $B - A$ y $A \cap B$ son disjuntos dos a dos:

(a) Supongamos por reducción al absurdo que existe $x \in (A - B) \cap (B - A)$. Entonces, $x \in A - B$ y $x \in B - A$. Pero $x \in A - B$ significa $x \in A$ y $x \notin B$. Ahora $x \in B - A$ equivale a $x \in B$ y $x \notin A$. Por tanto, no existe un elemento que cumpla simultáneamente $x \in A$ y $x \notin B$ y $x \in B$ y $x \notin A$.

(b) Supongamos por reducción al absurdo que existe $x \in (A - B) \cap (A \cap B)$. Entonces, $x \in A - B$ y $x \in A \cap B$. Pero como $x \in A - B$, se tiene que $x \notin B$, luego no puede pertenecer a $A \cap B$, contradiciendo que $x \in A \cap B$.

(c) Intercambiando los papeles de A y B en el caso anterior, se prueba que $(B - A) \cap (A \cap B) = \emptyset$.

Ahora nos falta comprobar que $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$. Lo vemos viendo el doble contenido. Si $x \in A \cup B$, entonces $x \in A$ ó $x \in B$. Supongamos que $x \in A$. Tenemos dos opciones:

(a) $x \in B$. Entonces, $x \in A \cap B$.

(b) $x \notin B$. Entonces, $x \in A - B$.

Por tanto, $x \in (A - B) \cup (A \cap B) \subseteq (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$. El mismo razonamiento intercambiando los papeles de A y B prueba que si $x \in B$, entonces $x \in (B - A) \cup (A \cap B) \subseteq (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$. Consecuentemente, $A \cup B \subseteq (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$.

Veamos el otro contenido. Si $x \in (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$, entonces $x \in (A - B)$ ó $x \in (B - A)$ ó $x \in (A \cap B)$. Pero, $A - B, B - A, A \cap B \subseteq A \cup B$, luego $x \in A \cup B$.

2.- *Decidir si los siguientes enunciados son correctos o no. Si es correcto, demostrarlo y si no lo es, dar un contraejemplo.*

(i) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A \Longleftrightarrow A \cup B = B$.

(ii) $A \cap B = A \cap C \Longrightarrow B = C$.

Solución. (i) Es cierto el enunciado. Para probarlo, demostramos que $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cap B = A$ y que $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cup B = B$. En efecto,

(a) Si $A \subseteq B$, entonces $\forall a \in A$, se cumple $a \in B$. Pero entonces $\forall a \in A$, se tiene $a \in A \cap B$, esto es, $A \subseteq A \cap B$ y como $A \cap B \subseteq A$, concluimos $A = A \cap B$.

(b) Si $A = A \cap B$, significa que $\forall a \in A$, $a \in A \cap B$ y como $A \cap B \subseteq B$, se tiene $\forall a \in A$, $a \in B$, esto es, $A \subseteq B$.

(c) Supongamos ahora que $A \subseteq B$ y veamos que $A \cup B = B$. Si $a \in A \cup B$, entonces $a \in A$ ó $a \in B$. Pero si $a \in A$, como $A \subseteq B$, se sigue que $a \in B$. En definitiva, $A \cup B \subseteq B$. Pero $B \subseteq A \cup B$, luego $A \cup B = B$.

(c) Si $A \cup B = B$, se tiene que $\forall a \in A \cup B$, $a \in B$. En particular, si $a \in A \subseteq A \cup B$, deducimos que $a \in B$, esto es $A \subseteq B$.

3.- *Se considera en $\mathbb{R}^2$ la relación binaria definida por*

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

(i) Demostrar que es una relación de equivalencia e interpretar geométricamente la clase de equivalencia del elemento (x, y).

(ii) Dada una relación de equivalencia $\sim_1$ sobre un conjunto A, se llama **sistema completo de representantes de la relación de equivalencia** $\sim_1$ *a un subconjunto $X \subseteq A$ tal que cualquier elemento de A está relacionado exactamente con un único elemento de X. Encontrar un sistema completo de representantes para la relación $\sim$ definida en $\mathbb{R}^2$.*

Solución. (i) Para ver que es una relación de equivalencia debemos probar que se cumplen las propiedades:

(a) Reflexiva: $\forall (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2, (x_1, y_1) \sim (x_1, y_1)$, lo cual es cierto puesto que $x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2$.

(b) Simétrica: $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, tales que $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$, entonces $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$. Ahora, $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ implica $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$, luego $x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2$ y, por tanto, $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$.

(c) Transitiva: $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$, tales que $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ y $(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$, se cumple $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$. En efecto, como $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ y $(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$, se cumple $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ y $x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2$. Pero ambas igualdades implican que $x_1^2 + y_1^2 = x_3^2 + y_3^2$, esto es, $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$.

La clase de equivalencia del elemento (x_1, y_1) viene dada por

$$[(x_1, y_1)] = \{(x - 2, y_2) | x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2\}.$$

Este conjunto representa la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt{x_1^2+y_1^2}$.

(ii) Un sistema completo de representantes para la relación $\sim$ es, por ejemplo, $I = \{(x,0)|x \geq 0\}$. En efecto, si $(x,0),(x',0) \in I$ verifican $(x,0) \neq (x',0)$, entonces $x \neq x'$ y $x,x' \geq 0$, luego $x^2 \neq x'^2$. Por consiguiente, $(x,0) \not\sim (x',0)$. Además, dado $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, se tiene que $(a,b) \sim (a^2+b^2,0)$ y $(a^2+b^2,0) \in I$.

4.- *Demostrar que si $(A,*)$ es un monoide, entonces el conjunto*

$$\mathfrak{U}(A) = \{a \in A \mid a \text{ inversible}\}$$

*con la restricción de la operación * a $\mathfrak{U}(A)$ es un grupo.*

Nota*: A* $(\mathfrak{U}(A),*)$ *se le llama* **grupo de las unidades de** *A.*

Solución. Comprobamos en primer lugar que $*_{|\mathfrak{U}(A)}$ está bien definida. En efecto, si $x_1,x_2 \in \mathfrak{U}(A)$, entonces existen $x_1^{-1},x_2^{-1} \in A$ tales que

$$x_i * x_i^{-1} = e = x_i^{-1} * x_i, \quad i = 1,2,$$

donde $e \in A$ es el elemento neutro de $*$. Entonces, aplicando la asocitiva y la definición de x_i^{-1}, se tiene

$$\begin{aligned} &x_1 * x_2 * (x_2^{-1} * x_1^{-1}) = x_1 * (x_2 * x_2^{-1}) * x_1^{-1} = x_1 * e * x_1^{-1} = x_1 * x_1^{-1} = e,\\ &(x_2^{-1} * x_1^{-1}) * x_1 * x_2 = x_2^{-1} * (x_1^{-1} * x_1) * x_2 = x_2^{-1} * e * x_2 = e \end{aligned}$$

luego $x_1 * x_2 \in \mathfrak{U}(A)$, si $x_1,x_2 \in \mathfrak{U}(A)$. Por otro lado, $\mathfrak{U}(A)$ es no vacío, ya que $e \in \mathfrak{U}(A)$. Pero como $(A,*)$ es un monoide y $\emptyset \neq \mathfrak{U}(A) \subseteq A$, esto significa que $(\mathfrak{U}(A),*_{|\mathfrak{U}(A)})$ es un semigrupo y al ser $e \in \mathfrak{U}(A)$, $(\mathfrak{U}(A),*_{|\mathfrak{U}(A)})$ es un monoide. Pero cada elemento x del monoide $(\mathfrak{U}(A),*_{|\mathfrak{U}(A)})$ tiene inverso en $\mathfrak{U}(A)$, a saber, x^{-1} por definición de $\mathfrak{U}(A)$, luego $(\mathfrak{U}(A),*_{|\mathfrak{U}(A)})$ es un grupo.

5.- *Sea $p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio mónico de grado m. Demostrar que todas sus raíces racionales son enteras, esto es, que si $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$, con α y β coprimos entre sí, es raíz de $p(x)$, entonces $\frac{\alpha}{\beta}$ es un número entero.*

Solución. Sea $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$, con α y β coprimos entre sí, una raíz racional de $p(x)$. Entonces,

$$p\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \sum_{i=0}^m a_i \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^i = 0,$$

luego

$$0 = \sum_{i=0}^m a_i \alpha^i \beta^{m-i} = \beta(a_0\beta^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\alpha^{m-1}) + a_m\alpha^m,$$

así que β divide a $a_m\alpha^m$ y como α y β son coprimos entre sí, se tiene que β divide a a_m. Pero $p(x)$ es un polinomio mónico, luego $a_m = 1$ y esto implica que $\beta = \pm 1$, esto es $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Z}$.