Examen de Algebra Lineal.

Cuestiones

C1. Sea $\mathfrak{B}_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, $\mathfrak{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ otra base de $\mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineal. Sea $\sigma \in \Sigma_3$ y $\mathfrak{B}_1 = \{e_{[1]\sigma}, e_{[2]\sigma}, e_{[3]\sigma}\}$. ¿Qué relación existe entre los determinantes de las matrices $M_{\mathfrak{B}_c\mathfrak{B}'}(f)$ y $M_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}'}(f)$?

C2. Estudiar si las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ son equivalentes. En caso de respuesta afirmativa, hallar P y Q matrices de paso tales que $A = PBQ$.

C3. Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal, $\{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq W$ un subconjunto libre y $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ tales que $f(v_i) = w_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Demostrar que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es libre ¿Es cierta la otra implicación?

Problemas

P1. De una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se sabe que $f((1,1,0)) = (2,1,1)$, $f((1,0,1)) = (1,2,0)$ y $f((1,1,-1)) = (1,-1,1)$.

(a) Determinar, si es posible, $f((x,y,z))$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. ¿Cuánto vale $rg(f)$?

(b) Sin emplear la definición de biyectividad, demostrar que f no es biyectiva.

(c) ¿Qué condiciones debe verificar una matriz A para que sea matriz asociada a f? ¿Es la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ asociada a f? En caso de respuesta afirmativa, localiza bases respecto de las cuáles lo sea.

d) Define una aplicación lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tenga el mismo núcleo que f pero que $f \neq g$. Aparte del núcleo, ¿tienen algo más en común ambas aplicaciones?

P2. Sea $a \in \mathbb{R}$. Resolver, cuando sea posible, el sistema $AX = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2a+2 & 3 & a \\ 4a-1 & a+1 & 2a-1 \\ 5a-4 & a+1 & 3a-4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a+4 \\ 2a+2 \\ a-1 \end{pmatrix}$. ¿Para qué valores de a el sistema es compatible indeterminado?

Teoría

Coordenadas de un vector: definición, demostración de su unicidad fijada la base y relación entre las coordenadas de un mismo vector en bases diferentes.