Examen de Algebra Lineal.

Cuestiones

C1. Sea V un K-espacio vectorial, W un subespacio vectorial de V y $v \in V - W$. Demostrar que $< v > \cap W = \{0_v\}$. Si tomamos un segundo vector $u \in V - W$, $u \neq v$ ¿se sigue verificando $< u, v > \cap W = \{0_v\}$? Razona tu respuesta. (1 pto.)

C2. De una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se sabe que $f((1,1,0)) = (2,1,0)$, $f((1,0,1)) = (1,2,0)$ y $f((1,1,-1)) = (1,1,-1)$. Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, ¿se puede determinar $f((x,y,z))$? En caso de respuesta afirmativa, estudiar si la aplicación f es biyectiva. (1 pto.)

C3. Demostrar, si es cierta, o dar un contraejemplo, si es falsa, la siguiente afirmación: "Si $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, verifica $|\det(A)| > 0$, entonces $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$". (1 pto.)

Problemas

P1. Sea $W =< (0,1,0,0), (1,1,0,0), (2,1,1,1) >\subseteq \mathbb{R}^4$ y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por $f((x,y,z,t)) = (2x - y + 2z - 4t, y + z - 2t, 2x - y - 2t, 2x - y + z - 3t)$.

(i) Probar que $f|_W : W \to W$ es un endomorfismo del subespacio vectorial W. (0.5 ptos.)

(ii) Calcular la matriz A asociada a $f|_W$ respecto de la base $\mathfrak{B}_W = \{(0,1,0,0), (1,1,0,0), (2,1,1,1)\}$ (en origen y llegada). (0.75 ptos.)

(iii) Determinar bases de W respecto de las cuales la matriz asociada a $f|_W$ sea de la forma $B = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, siendo $s = \dim(f|_W(W))$. (0.75 ptos.)

(iv) Determinar P y Q inversibles tales que $A = PBQ$. (0.5 ptos.)

P2. Se considera la familia de matrices $C_{a,b} \in \mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{R})$ definida por:

$$C_{a,b} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcular $\det(\mathrm{C_{a,b}})$. (0.5 ptos.)

(ii) Determinar el rango de $C_{a,b}$, según los diferentes valores de a y b. (1 pto.)

(iii) Resolver el sistema de ecuaciones homogéneo que tiene a $C_{m,1/m}$ como matriz del sistema, según los valores de $m \in \mathbb{R} - \{0\}$. (1 pto.)

Teoría

T1. Definición de aplicación lineal y sus propiedades (enunciadas y demostradas).(2 ptos.)