Examen de Algebra Lineal.

Cuestiones

C1. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Demostrar que $U = \{B \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) | AB = 2B\}$ es un subespacio vectorial de $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y calcular la dimensión de U.

C2. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión 3 y $f : V \to V$ una aplicación lineal tal que $f^3 = 0$ y $f^2 \neq 0$. Probar que si $f^2(v) \neq 0$, entonces $\mathfrak{B}_V = \{v, f(v), f^2(v)\}$ es una base de V y calcular $M_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}(f)$. ¿Es f inyectiva?

C3. Sea $T_n = (t_{ij}) \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, donde $t_{ij} = \begin{cases} b & \text{si } i \leq j \\ a & \text{si } i = j+1 \\ -b & \text{si } i > j+1 \end{cases}$. Calcular $det(T_n)$.

Problemas

P1. Se consideran los subespacios vectoriales $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x+y-t = 0, x+2z+t = 0\}$, $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x - 2y + 6z + 5t = 0, x + t = 0\}$

(i) Determinar $U + W$ y $U \cap W$.

(ii) Localizar $T \subseteq \mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{R}^4 = T \oplus (U \cap W)$.

(iii) Hallar, si es posible, $f \in End(\mathbb{R}^4)$ tal que $f(U + W) = U \cap W$, dando la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

(iv) ¿Existe $g \in End(\mathbb{R}^4)$ tal que $g(U \cap W) = U + W$? Razona la respuesta.

P2. Se considera la familia de aplicaciones lineales $f_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que tiene a $M_a =$

$\begin{pmatrix} a & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & -a & 1 & -a \\ 5 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ por matriz asociada a f_a en la base $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^4} = \{(1,0,1,0),(1,-1,0,0),(0,1,-1$

(i) Demostrar que f_a es biyectiva si y sólo si $a \neq 1, \frac{7}{3}$.

(ii) Para $a = 1$, demostrar que $Im(f_1)$ es un subespacio de dimensión 3 y localizar bases respecto de las cuales $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix}$ sea matriz asociada a f_1.

Teoría

T1. Definición de solución de un sistema de ecuaciones lineales. Localización de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales compatible (Proposiciones 4.2 y 4.3 del Tema 4).