Examen de Algebra Lineal.

Cuestiones

C1. Se considera los subespacios vectoriales

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = 0\}$$

y

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z + t = 0 \text{ y } x - y + z - t = 0\}.$$

Determinar una base de W. Demostrar, sin realizar la intersección, que $U \cap W \neq \{(0, 0, 0, 0)\}$. (1 pto.)

C2. Se toma el vector de $\mathbb{R}^3$ con coordenadas $(a\ b\ c)$ en la base

$$\mathfrak{B} = \{(1, -1, 0), (1, 1, 0), (1, 1, -1)\}.$$

¿Qué vector es? ¿Cuáles son sus coordenadas en la base

$$\mathfrak{B}' = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (2, 2, -1)\}?$$

(1 pto.)

C3. Se considera las familia de matrices $M_a \in \mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{R})$, $X, B_a \in \mathrm{Mat}_{3\times1}(\mathbb{R})$ definidas por:

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ -2 & a^2 + a & a - 2 \\ a - 2 & a & a^2 - a \end{pmatrix}, \qquad B_a = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a^3 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Demostrar que el sistema de ecuaciones $M_a X = B_a$ tiene más de una solución si y sólo si $a = 0, 1$. Hallar el conjunto de soluciones cuando el sistema sea homogéneo. (1.5 pto.)

Problemas

P1. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que tiene a $A=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-1&2&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$ por matriz asociada en la base $\mathfrak{B}=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$.

(a) Hallar $\ker f$ y un subespacio $W\subseteq\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3=\ker f\oplus W$. (0.5 pto.)

(b) Sin utilizar la definición, demostrar que f no es biyectiva. (0.25 pto.)

(c) Hallar bases de $\mathbb{R}^3$ respecto de las cuales la matriz asociada a f sea $B=\begin{pmatrix}I_s&0\\0&0\end{pmatrix}$. (0.75 pto.)

(d) Localizar matrices inversibles P y Q tales que $B=PAQ$. (0.5 pto.)

(e) Hallar bases de $\mathbb{R}^3$ respecto de las cuales la matriz asociada a f sea $C=\begin{pmatrix}0&0\\I_s&0\end{pmatrix}$. (0.25 pto.)

P2. Se considera la matriz $A_n\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definida por

$$A_n=\begin{pmatrix}2&4&0&0&\dots&0&0\\1&2&4&0&\dots&0&0\\0&1&2&4&\dots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\dots&1&2\end{pmatrix}.$$

(a) Demostrar que $\det(A_n)=-2^3\det(A_{n-3})$, para $n>3$. (1.25 pto.)

(b) Probar que $\mathrm{rg}(A_n)=n$ si y sólo si $n=3k$ ó $n=3k+1$. (1 pto.)

Teoría

T1. (2 pto.) Rango de una matriz: definición de rango de fils, rango de columnas y demostración de que ambos coinciden. (Apartado 1 del Tema 4).